ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ишмухаметова М.Г.

ТЕОРИЯ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Методическое пособие

Казань – 2008

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
физического факультета

УДК 519.21

Ишмухаметова М.Г. Методическое пособие предназначено для практических занятий по дисциплине «Теория обработки геодезических измерений».
Казань, 2008, 46 с.

В пособии изложены основные принципы обработки геодезических измерений различных видов, рассмотрены постановка и методы решения задачи уравнивания, приведены примеры обработки геодезических измерений. Пособие предназначено для студентов физического, геологического, географического факультетов, изучающих курсы «Геодезия», «Геодезические основы карт».

Рецензент: ***Шпекин М.И.***, доцент кафедры геодезии Казанской государственного архитектурно-строительного университета

ВВЕДЕНИЕ

В геодезии основные работы связаны прежде всего с процессом измерения некоторой величины (измерение длины линии и углов на местности, измерение площадей участков по карте, аэроснимку и др.). Измерить какую-либо величину – это значит сравнить ее с другой величиной, принятой за единицу измерения или эталон в выбранной системе единиц измерений.

Величина может быть измерена разными способами. При измерении *прямым* способом измерение проводится непосредственно сравнением искомой величины с эталоном. Для этого используют приборы, имеющие отсчетную шкалу (линейку, транспортир, горизонтальные, вертикальные лимбы и др.). При *косвенных* измерениях измеряется не сама величина, а другие величины, связанные с искомой определенными математическими зависимостями (измерение площади фигуры, ее объема и др.).

При измерении любой величины строго соблюдают *правило многократности,* то есть одна и та же величина должна быть измерена многократно, минимум два раза. При многократном измерении величины различают:

равноточные измерения – измерения, при которых искомая величина измерялась при одинаковом комплексе условий (внешних, технических, квалификационных и др.);

неравноточные измерения – измерения, при которых комплекс условий изменялся при измерении искомой величины.

Очень важно определить вид измерений, так как обработка прямых и косвенных, равноточных и неравноточных измерений существенно отличается друг от друга.

При многократном измерении величины имеем избыточное количество измерений. Если измеряется одна и та же величина А *n* раз, то одно измерение является необходимым, а *(n-1)* – избыточными измерениями. Избыточные измерения необходимы для контроля результатов измерений искомой величины А. Как бы точно не измеряли величину А, истинное значение которой

X, будем получать каждый раз разные ее значения $x_1, x_2, x_{3,...} x_n$, которые будут отклоняться от ее истинного значения X. Отклонение результатов измерений от истинного значения величины называется *погрешностью* измерений Δ (ошибкой или невязкой) и равно:

$$\pm\Delta = x_i - X$$

Для того чтобы ошибки можно было учитывать, их классифицируют на группы и подгруппы:

ошибки по действию	*ошибки по происхождению*
грубые	*ошибки приборов*
систематические	*внешние*
случайные	*личные*

Грубые ошибки – это ошибки, которые по абсолютной величине превышают заранее установленный для данных условий предел точности. Такие ошибки возникают вследствие неисправности приборов, небрежности наблюдателя и проверяются, а также устраняются сразу после измерений.

Систематические ошибки – это ошибки, которые при повторных измерениях не изменяются по величине или изменяются по определенной математической зависимости. Эта зависимость возникает при некотором воздействии условий наблюдений на результат измерений. Очень важно выявить такую зависимость, определить ее математическую величину и исключить ее из результатом математическими действиями.

Случайные ошибки - это ошибки, которые не зависят от результатов измерений и в появлении которых нет никакой зависимости, их закономерность проявляется только в общей массе измерений. Такие ошибки не могут быть устранены из результатов конкретного измерения, их влияние можно только ослабить или уменьшить путем повышения качества и количества измерений.

Ошибки приборов обусловлены конструкцией приборов или их неточной юстировкой. Одни ошибки приборов исправляются, другие могут быть учтены в результатах измерений в виде поправок.

Внешние ошибки возникают из-за влияния на процесс измерения факторов внешней окружающей среды. К таким факторам относятся туман, ветер, резкие перепады температур воздуха и т. д. Данные факторы исключают путем строгого соблюдения технических инструкций при проведении геодезических работ.

Личные ошибки вызваны физическими и психологическими особенностями наблюдателя (особенности зрения, темперамент, занижение и завышение отсчетов, их округление, состояние здоровья на момент измерений, опыт). Значение личных ошибок трудно выделить, поэтому они являются составной частью случайных ошибок.

Ошибки грубые, систематические, приборные, внешние вполне реально выделить и исключить из результатов измерений. Для этого на каждый вид геодезических измерений разработаны инструкции и методики измерений, способы контроля измерений, определены внешние условия, при которых необходимо проводить измерения. Поэтому на результат измерений наиболее существенно влияют только случайные ошибки.

Распределение случайных ошибок подчинено нормальному закону распределения. Если по оси абцисс отложить величины случайных ошибок Δ_i (например, Δ_i со значениями *-3m, -2m, -m, 0, m, 2m, 3m*), а по оси ординат их количество, то получим нормальную кривую ошибок Гаусса (рис. 1). На основе нормальной кривой ошибок Гаусса выделяют четыре основных свойства случайных ошибок, которые проявляются только в их общей массе.

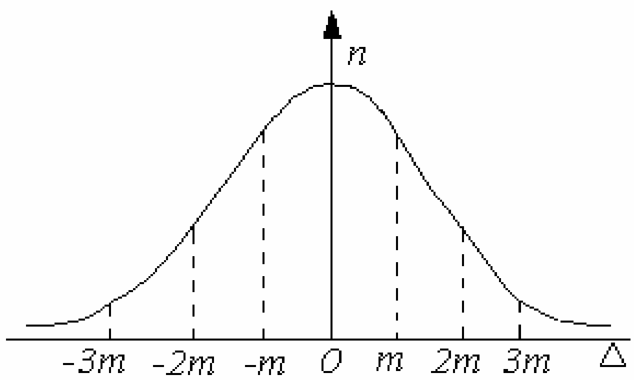

Рис. 1. Нормальная кривая Гаусса распределения случайных ошибок.

Случайные ошибки обладают следующими свойствами:

1) Свойство ограниченности (по абсолютной величине не превосходят определенного предела);
2) Свойство симметричности (положительные и отрицательные значения ошибок равновозможны);
3) Свойство унимодальности (малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются чаще, чем большие);
4) Свойство компенсации (среднее арифметическое значение случайных ошибок при неограниченном увеличении числа измерений стремится к нулю).

В курсе «Теория математической обработки геодезических измерений» изучаются свойства, закономерности распределения случайных ошибок, способы их учета и оценки точности полученный результатов измерений искомой величины. Таким образом, основными задачами курса являются следующие:

- определение наиболее вероятного значения искомой величины по результатам ее измерений;
- оценка точности результата определения искомой величины и его достоверность.

Свойства случайных ошибок, проявляющиеся в их общей массе, положены в основу обработки измерений и наблюдений различных видов и назначений.

ТЕМА 1. ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Предположим, что некоторая величина А, истинное значение которой X, измерена непосредственно $\boldsymbol{n}$ раз. Все измерения равноточные. В результате измерений получены значения $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots \boldsymbol{x_n}$. Случайные ошибки измерений равны:

$$\Delta_1 = x_1 - X$$

$$\Delta_2 = x_2 - X$$

$$\dots$$

$$\Delta_n = x_n - X$$

Суммируя (квадратные скобки используем как знак суммы) левые и правые части уравнений получим:

$$[\Delta] = [x] - n \cdot X \tag{1.1}$$

$$X = [x]/n - [\Delta]/n$$

Последнее слагаемое на основании свойства компенсации случайных ошибок при большом числе n стремится к нулю, поэтому имеем

$$X = [x]/n \tag{1.2}$$

Формула (2) показывает, что наиболее вероятным значением искомой величины А является среднее арифметическое результатов равноточных измерений.

Оценить точность полученного значения X – это значит определить насколько близко найденное наиболее вероятное значение X искомой величины А от ее истинного значения. Для оценки точности применяют несколько критериев или параметров оценки точности, но все их можно разделить на две группы - абсолютные и относительные оценки точности.

Абсолютные оценки точности применяют тогда, когда точность измерения величины А не зависит от самого истинного ее значения.

Относительные оценки точности применяют тогда, когда точность измерения величины А зависит от самого ее истинного значения X.

К абсолютным оценкам точности результата относятся следующие параметры:

средняя квадратическая ошибка одного измерения (формула Бесселя):

$$m = \sqrt{[\Delta^2]/(n-1)} \tag{1.3}$$

средняя квадратическая ошибка среднего арифметического:

$$M = m/\sqrt{n} \quad (1.4)$$

Опытным путем установлено, что случайные ошибки Δ и m взаимозависимы. Если взять интегральное распределение случайных ошибок (рис. 1), то число случайных ошибок Δ_i, имеющих значение от 0 до m, будет составлять 68,3%, от 0 до $2 \cdot m$ - 95,4% и от 0 до $3 \cdot m$ - 99,7%. Следовательно, число ошибок Δ_i со значением $3 \cdot m$ составляет всего 0,3% от всех ошибок. Значение $3 \cdot m$ определяется как *предельная ошибка:*

$$\Delta_{пред} = 3 \cdot m \quad (1.5)$$

Измерения с ошибкой больше $3 \cdot m$ отбрасывают. Ошибки таких измерений относят к грубым ошибкам. Для повышения точности результатов иногда исключают измерения, ошибки которых больше, чем $2 \cdot m$.

Относительные оценки точности применяют тогда, когда точность измерения величины А зависит от самого ее истинного значения X.

Относительной ошибкой называют отношение абсолютной ошибки к наиболее вероятному значению X искомой величины А. Таким образом, относительная ошибка записывается в виде дроби:

M/X - относительная средняя ошибка

m/X - относительная средняя квадратическая ошибка

$\Delta_{пред}/X$ - относительная предельная ошибка и т.д.

Принято относительные ошибки выражать в виде дроби, в числителе которой стоит единица, например,

$$m/X = 1/(X : m);$$

$$M/X = 1/(X : M); \quad (1.6)$$

$$\Delta_{пред}/X = 1/(X : \Delta_{пред})$$

Знаменатель округляется до двух-трехзначащих цифр.

<u>Пример.</u> Прямым способом при одних и тех же условиях измерена длина линии (см. табл. 1). Определить наиболее вероятное значение длины линии и оценить его точность.

Таблица 1.

№	D_i (м)	Δ_i=D_i-D (см)	$(D_i\text{-}D)^2$ (см)
1	455,35	-1	1
2	455,35	-1	1
3	455,20	+14	196
4	455,05	+29	841
5	455,75	-41	1681

Суммы [2276,7] [2720]

1. Наиболее вероятное значение измеряемой величины как среднее арифметическое (1.2):

$[D_i]$=2276,7; D= $[D_i]$/n=2276,7/5 = 455,34 (м)

2. Средняя квадратическая ошибка измерения (1.3):

$m = \sqrt{}\ 2720/(5\text{-}1) = 26$ (см) = 0,26 (м)

3. Средняя квадратическая ошибка среднего арифметического (1.4):

$M = 26/\sqrt{5} = 5{,}2$ (см)

4. Предельная ошибка (1.6):

$\Delta_{пред} = 2\cdot m = 52$ (см) = 0,52 (м)

Точность измерения расстояния зависит от самой измеряемой величины, поэтому необходимо помимо абсолютных ошибок определить относительные ошибки по формулам (1.6).

5. Относительная средняя квадратическая ошибка:

1/455,34:0,26=1/1751,3=1/1750

6. Относительная предельная ошибка:

1/ X:$\Delta_{пред}$ = 1/455,34:0,52=1/875,6= 1/900.

ТЕМА 2. ОБРАБОТКА КОСВЕННЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В практике геодезических работ часто искомая величина сама непосредственно не измеряется, а измеряются некоторые независимые величины, от которых она зависит, то есть искомая величина определяется косвенным методом. В этом случае истинное значение X искомой величины А есть функция некоторых $к$ независимых параметров $X = f(x_1, x_2, \ldots, x_к)$. Независимые параметры $x_1, x_2, \ldots, x_к$ получены непосредственно из измерений со средними квадратическими ошибками $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Тогда наиболее вероятное значение искомой величины А находится как среднее арифметическое значение функции X по всем n раз измеренным параметрам:

$$\overline{X} = \Sigma f(x_1 , x_2, \ldots, x_к) /n \qquad (2.1)$$

Точность результата оценивается с помощью средней квадратической ошибки, которая вычисляется по формуле:

$$m^2 = (\partial f/\partial x_1)^2 \cdot m_1^2 + (\partial f/\partial x_2)^2 \cdot m_2^2 + \ldots + (\partial f/\partial x_к)^2 \cdot m_к^2 \qquad (2.2)$$

где $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2, \ldots \partial f/\partial x_к$ есть частные производные функции по каждому измеренному параметру.

<u>Пример</u>. Определите длину и точность ломаной линии, состоящей из трех отрезков x_1, x_2, x_3, каждый из которых измерен непосредственно пять раз (см. табл. 2).

Таблица 2.

№	x_1 (м)	$(X\text{-}x_{1i})^2$ см	x_2 (м)	$(X\text{-}x_{2i})$ см	x_3 (м)	$(X\text{-}x_{3i})$ см
1	75,01	4	89,10	0	72,44	1
2	75,04	1	89,12	4	72,41	16
3	75,07	16	89,09	1	72,47	4
4	75,00	9	89,11	1	72,46	1
5	75,03	0	89,07	9	72,45	0

$[x_1]/5$=75,03 [30] $[x_2]/5$=89,10 [15] $[x_3]/5$=72,45 [22]

1. Наиболее вероятные значения длин отрезков (1.2):

   X_1= 75,03 м, X_2 =89,10 м, X_3 =72,45 м

2. Средние квадратические ошибки измерений длин отрезков (1.3):

$m_1=\sqrt{30}/(5-1)=2{,}73$ (см), $m_2=\sqrt{15}/(5-1)=1{,}93$ (см), $m_3=\sqrt{22}/(5-1)=2{,}35$ (см)

3. Наиболее вероятное значение искомой величины длины ломаной (2.1):

$$X = f(x_1, x_2, \ldots, x_к) = x_1 + x_2 + x_3 = 75{,}03+89{,}10+72{,}45 = 236{,}58 \text{ (м)}$$

4. Средняя квадратическая ошибка длины ломаной (2.2):

$$\partial f/\partial x_1 = 1, \qquad \partial f/\partial x_2 = 1, \qquad \partial f/\partial x_3 = 1$$

$$m^2 = 1\cdot m_1^2 + 1\cdot m_2^2 + 1\cdot m_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

$$m = 7{,}01 \text{ (см)} = 0{,}07 \text{ (м)}$$

5. Относительная средняя квадратическая ошибка длины ломаной (1.6):

$$1/\ X{:}m = 1/236{,}58{:}0{,}07 = 1/3380 = 1/3000$$

Задача 1. При геометрическом нивелировании способом из середины превышение одной точки над другой определяется по формуле $h = a - b$, где a, b – известные отсчеты по рейке, определенные с равными ошибками $m_a = m_b = \pm 2$ мм. Определить ошибку превышения.

Задача 2. Определите значения приращений прямоугольных координат и их точность при решении прямой геодезической задачи, если горизонтальное проложение между точками равно 143,5 м ± 0,045 м, а дирекционный угол заданного направления составляет $41^o20' \pm 1{,}3'$.

Задача 3. Методом тригонометрического нивелирования измерены горизональное проложение D=143,5 м ± 0,5 м, вертикальный угол $\nu = 2^o30' \pm 1'$. Вычислите превышение по формуле $h = D \cdot tg(\nu)$ и оцените его точность. (При выполнении математических действий градусы и минуты необходимо перевести в радианы).

Задача 4. Найдите коэффициент нитяного дальномера по формуле $K = D/l$ и его среднюю квадратическую ошибку, если измеренное расстояние D=147,83 м ± 0, 070 м, а разность отсчетов по дальномерным нитям l= 1,48 м ± 0,005 м.

ТЕМА 3. ОБРАБОТКА НЕРАВНОТОЧНЫХ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Для сопоставления, сравнения неравноточных наблюдений, оценки их точности вводят понятие веса измерения. *Весом измерения p* называется степень доверия к результатам измерения, выраженная числом. Чем больше вес, тем точнее, надежнее результат. Так как точность измерения оценивается средней квадратической ошибкой m, то вес p непосредственно зависит от ее значения:

$$p = c/m^2 , \qquad (3.1)$$

где c – произвольный постоянный коэффициент. Значение коэффициента c веса выбирают таким, чтобы значение веса p было близко к единице. В этом случае проще и удобнее проводить вычисления.

Пусть измерение имеет вес, равный единицы, тогда средняя квадратическая ошибка такого измерения называется *ошибкой единицы веса μ:*

$$p = c/\mu^2 = 1$$

$$\mu = \sqrt{c} \qquad (3.3)$$

Подставим в формулу веса любого измерения вместо c значение μ из (3.3)

$$p=\mu^2/ m^2,$$

тогда средняя квадратическая ошибка непосредственного измерения равна:

$$m=\mu/\sqrt{p}, \qquad \mu= m\sqrt{p} \qquad (3.4)$$

Предположим, что некоторая величина А, истинное значение которой X, измерена непосредственно n раз. В результате неравноточных измерений получены значения $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots x_n}$ с весами $p_1, p_2,\dots p_n$.

1. Наиболее вероятное значение X измеряемой величины А определяется как среднее арифметическое с учетом весов измерений:

$$\bar{X} = [xp] /[p] \qquad (3.5)$$

2. Ошибка единицы веса μ

$$\mu = \sqrt{[\Delta^2 p]/(n-1)} \qquad (3.6)$$

3. Средняя квадратическая ошибка среднего арифметического M:

$$M=\mu / \sqrt{[p]} \qquad (3.7)$$

Пример. По прямым неравноточным измерениям (см. табл. 3) найти наиболее вероятное значение горизонтального угла между двумя направлениями и оценить его точность

Таблица 3.

№	x_i	Число приемов, N	p_i	$x_i \cdot p_i$	$\Delta_i^2=(X- x_i)^2$	$\Delta_i^2 \cdot p_i$
1	$71^o\ 38'\ 03''$	4	0,2	2,6	25	5
2	06	12	0,6	3,6	4	2,4
3	02	2	0,1	0,2	36	3,6
4	10	10	0,5	5,0	4	2
5	12	4	0,2	2,4	16	3,2
6	05	8	0,4	2,0	0	0
Суммы			[2,0]	[15,8]		[16,2]

1. Определение весов: p_i =N/20

2. Наиболее вероятное значение X (только для секунд) по формуле (3.5):

$$\overline{X} = 15{,}8/2{,}0=8{,}0'', \qquad X = 71^o\ 38'\ 08''$$

3. Ошибка единицы веса μ (3.6):

$$\mu = \sqrt{16{,}2/5}=1{,}8''$$

3. Средняя квадратическая ошибка среднего арифметического M (3.7):

$$M=1{,}8\ /\sqrt{2}=1{,}3''$$

Задача. Отметка H точки местности получена по шести нивелирным ходам (см. табл. 4). Выполнить полную математическую обработку результатов.

Таблица 4.

Номер хода, n	H, м	m_H. мм
1	196,529	6,3
2	196, 522	8,4
3	196,517	9,1
4	196,532	4,3
5	196,530	5,2
6	196,520	7,2

ТЕМА 4. ОБРАБОТКА КОСВЕННЫХ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим формулы определения весов в случае, когда измеренная величина является функцией некоторых независимых параметров $X=f(x_1,x_2,\ldots, x_к)$. Независимые параметры $x_1, x_2,\ldots, x_к$ получены непосредственно из измерений со средними квадратическими ошибками $m_1, m_2,\ldots, m_k$ и имеют веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Из формулы (3.3) имеем:

$$m^2=\mu^2/\sqrt{p}.$$

Заменяя в формуле (2.2) значения средней квадратической ошибки через веса, найдем зависимости между весами аргументов p_i и функциями P_f в общем виде:

$$\mu^2/P_f = (\partial f/\partial x_1)^2\cdot\mu^2/p_1 + (\partial f/\partial x_2)^2\cdot\mu^2/p_2 + \ldots + (\partial f/\partial x_к)^2\cdot\mu^2/p_n$$

Разделим обе части этого выражения на μ^2, получим

$$1/P_f = (\partial f/\partial x_1)^2\cdot 1/p_1 + (\partial f/\partial x_2)^2\cdot 1/p_2 + \ldots + (\partial f/\partial x_к)^2\cdot 1/p_n \qquad (4.1)$$

Формула (4.1) применяется для определения веса искомой величины, которая является функцией независимых измеренных параметров с известными средними квадратическими ошибками или весами.

Пример. Найти вес площади треугольника, если основание его a=2,0 м получено с весом 2,0, а высота h=4,0 получено с весом 0,5. Площадь треугольника по формуле:

$$S = a\cdot h/2$$

Найдем частные производные заданной функции п двум переменным параметрам a и h:

$$\partial f/\partial a= h/2, \qquad \partial f/\partial a= a/2$$

Находим весискомой величины по формуле (4.1):

$1/P_S = (\partial S/\partial a)^2\cdot 1/p_a + (\partial S/\partial h)^2\cdot 1/p_h = (h/2)^2\cdot 1/p_a + (a/2)^2\cdot 1/p_h = (4/2)^2\cdot 0{,}5 + (2/2)^2\cdot 2 = 4$

Вес площади равен: P_S = 1/4 = 0,25.

Задача 1. Вес длины линии равен 9. Найти вес утроенного значения ее длины.

Задача 2. В треугольнике два угла измерены с весами 3,0 и 6,0. Найти вес третьего угла.

ТЕМА 5. ЗАДАЧА УРАНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В практике геодезических вычислений часто возникает задача совместной обработки результатов измерений величин, связанных между собой математическими соотношениями, то есть функционально зависимыми. Число измерений при этом больше, чем число неизвестных искомых величин. Наличие избыточных измерений позволяет выполнить контроль измерений и повысить надежность и точность уравненных неизвестных и их функций.

Пусть при измерении неизвестных величин, истинное значение которых $X_1, X_2, \ldots, X_n$, получены результаты $l_1, l_2, \ldots, l_n$ с весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$. При этом известно, что между истинными значениями искомых величин существует функциональная зависимость, математически выраженная уравнениями вида:

$$
\begin{aligned}
&f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0\\
&f_2(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_r(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

где n – число всех измеренных неизвестных, r – число независимых уравнений, $r<n$, а $t= n-r$ – число необходимых измерений.

Вследствие ошибок измерений при подстановке измеренных значений $l_1, l_2, \ldots, l_n$ в уравнения (5.1) получатся невязки:

$$
\begin{aligned}
&f_1(l_1, l_2, \ldots, l_n) = V_1\\
&f_2(l_1, l_2, \ldots, l_n) = V_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_r(l_1, l_2, \ldots, l_n) = V_r
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Для устранения невязок необходимо в измерения ввести поправки , чтобы равенство нулю в уравнениях (5.1) выполнялось:

$$
\begin{aligned}
&f_1(l_1+v_1,\ l_2+v_2, \ldots, l_n+v_n) = 0\\
&f_2(l_1+v_1,\ l_2+v_2, \ldots, l_n+v_n) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_r(l_1+v_1, l_2+v_2, \ldots, l_n+v_n) = 0
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Система уравнений (5.3) называется условными уравнениями, а величины $l_1+v_1,\ l_2+v_2, \ldots, l_n+v_n$ - уравненными значениями измеренных величин.

В практике геодезических измерений число условных уравнений может быть как меньше числа искомых уравненных значений (5.3), так и больше числа уравненных значений (5.5). Но и в том и в другом случае система условных уравнений будет неопределенной. Поэтому основным этапом задачи уравнивания является приведение системы условных уравнений к системе нормальных уравнений. *Система нормальных уравнений* – это система, в которой число уравнений равно числу неизвестных.

Приведение системы условных уравнений к системе нормальных уравнений выполняют по принципу наименьших квадратов, согласно которому поправки к измеренным величинам должны удовлетворять условию:

$$[pV^2] = min \qquad (5.4)$$

Доказано, что этот метод (принцип Лежандра) приводит к наилучшим результатам уравненных искомых величин.

Рассмотрим приведение системы условных уравнений к системе нормальных уравнений по принципу наименьших квадратов, когда функциональная зависимость между искомыми значениями и измеренными величинами выражена в виде системы n линейных уравнений:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m - d_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m - d_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm} - d_n = 0 \end{gathered} \qquad (5.5)$$

m – число неизвестных x_i, причем $m<n$, a_{ij} – постоянные коэффициенты, d_i – свободные члены. Запишем систему уравнений (5.5) в виде:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) - d_i = V_i \qquad (5.6)$$

Подставим условие (5.4) в (5.6), считая измерения равноточными, тогда

$$[V^2] = [f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) - d_i]^2 = W = min \qquad (5.7)$$

Это задача на условный экстремум, которая решается при условии:

$$\partial W/\partial x_1 = 0, \quad \partial W/\partial x_2 = 0, \ \ldots \quad \partial W/\partial x_m = 0 \qquad (5.8)$$

В системе (5.8) число уравнений равно числу неизвестных, каждое условие дает одно уравнение:

$$\partial W/\partial x_1 = 2\cdot V_1\cdot \partial V_1/\partial x_1 + \ldots + 2\cdot V_n\cdot \partial V_n/\partial x_n = 0, \qquad (5.9)$$

учитывая (5.5), имеем:

$$\partial V_1/\partial x_1 = a_{i1}, \quad \partial V_2/\partial x_2 = a_{i2}, \ \ldots, \quad \partial V_m/\partial x_m = a_{im} \qquad (5.10)$$

Подставляем значения частных производных (5.10) в (5.9) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &[V_i a_{i1}] = 0 \\ &[V_i a_{i2}] = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &[V_i a_{im}] = 0 \end{aligned} \qquad (5.11)$$

Система (5.11) является системой нормальных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных. Такая система уравнений является определенной и решается однозначно. Рассмотрим алгоритм приведения системы условных уравнений к нормальной системе для двух видов измерений: для равноточных измерений и для неравноточных измерений.

1. Случай равноточных измерений.

Пример 1. Пусть задана система условных уравнений, в которой три неизвестных x, y, z и шесть уравнений поправок:

$$\begin{aligned} x \qquad\qquad &= V_1 \\ y \qquad &= V_2 \\ z \quad &= V_3 \\ x + y \quad + 0{,}5 &= V_4 \\ y + z \quad &= V_5 \\ x + y + z - 1{,}0 &= V_6 \end{aligned}$$

1. Выписываем постоянные коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы.

№ уравнения	*a*	*b*	*c*	*d*
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	1	1	0	0,5
5	0	1	1	0
6	1	1	1	-1,0

2. Находим произведения коэффициентов и суммируем по столбцам.

№ уравнения	$a{\cdot}a$	$a{\cdot}b$	$a{\cdot}c$	$a{\cdot}d$	$b{\cdot}b$	$b{\cdot}c$	$b{\cdot}d$	$c{\cdot}c$	$c{\cdot}d$
1	1·1	1·0	1·0	1·0	0·0	0·0	0·0	0·0	0·0
2	0·0	0·1	0·0	0·0	1·1	1·0	1·0	0·0	0·0
3	0·0	0·0	0·1	0·0	0·0	1·1	0·0	1·1	1·0
4	1·1	1·1	1·0	1·0,5	1·1	1·0	1·0,5	0·0	0·0,5
5	0·0	0·1	0·1	0·0	1·1	1·1	1·0	1·1	1·0
6	1·1	1·1	1·1	1·(-1,0)	1·1	1·1	1·(-1,0)	1·1	1·(-1,0)
Суммы	3,0	2,0	1,0	-0,5	4,0	3,0	-0,5	3,0	-1,0

3. Записываем систему нормальных уравнений в виде:

$$
\begin{aligned}
&[aa]\,x + [ab]y + [ac]z + [ad] = 0\\
&[ab]\,x + [bb]y + [bc]z + [ad] = 0\\
&[ac]\,x + [bc]y + [cc]z + [cd] = 0
\end{aligned}
\qquad (5.12)
$$

то есть в численном выражении имеем:

$$
\begin{aligned}
&3{,}0x + 2{,}0y + 1{,}0z - 0{,}5 = 0\\
&2{,}0x + 4{,}0y + 3{,}0z - 0{,}5 = 0\\
&1{,}0x + 3{,}0y + 3{,}0z - 1{,}0 = 0
\end{aligned}
$$

$x = 0{,}124$, $y = -0{,}122$, $z = 0{,}373$

Как видим, система нормальных уравнений является симметричной относительно главной диагонали, а ее элементы всегда положительные. Это служит контролем при составлении нормальных уравнений. Система уравнений решается относительно неизвестных любым способом, например способом последовательного исключения или с помощью матриц.

<u>2. Случай неравноточных измерений.</u>

В случае неравноточных измерений систему условных уравнений необходимо привести к системе равноточных уравнений. Это можно сделать двумя путями.

Способ 1.Учитывать веса измеренных параметров путем ввода значений весов в коэффициенты линейных уравнений при приведении системы условных уравнений к нормальному виду.

Пример 2. Пусть задана система условных уравнений с весами p:

	вес, p
$x = V_1$	1,2
$y = V_2$	1
$z = V_3$	1,3
$x + y + 0{,}5 = V_4$	1,6
$y + z = V_5$	1,6
$x + y + z - 1{,}0 = V_6$	1,8

1. Выписываем постоянные коэффициенты при неизвестных, свободные члены и веса системы.

№ уравнения	a	b	c	d	p
1	1	0	0	0	1,2
2	0	1	0	0	1,0
3	0	0	1	0	1,3
4	1	1	0	0,5	1,6
5	0	1	1	0	1,6
6	1	1	1	-1,0	1,8

2. Находим произведения коэффициентов и весов, суммируем по столбцам.

№ уравнения	$a{\cdot}a{\cdot}p$	$a{\cdot}b{\cdot}p$	$a{\cdot}c{\cdot}p$	$a{\cdot}d{\cdot}p$
1	1·1·1,2	1·0·1,2	1·0·1,2	1·0·1,2
2	0·0·1,0	0·1·1,0	0·0·1,0	0·0·1,0
3	0·0·1,3	0·0·1,3	0·1·1,3	0·0·1,3
4	1·1·1,6	1·1·1,6	1·0·1,6	1·0,5·1,6
5	0·0·1,6	0·1·1,6	0·1·1,6	0·0·1,6
6	1·1·1,8	1·1·1,8	1·1·1,8	1·(-1,0) ·1,8
Суммы	4,6	3,4	1,8	-1,0

№	$b{\cdot}b{\cdot}p$	$b{\cdot}c{\cdot}p$	$b{\cdot}d{\cdot}p$	$c{\cdot}c{\cdot}p$	$c{\cdot}d{\cdot}p$
1	0·0·1,2	0·0·1,2	0·0·1,2	0·0·1,2	0·0·1,2
2	1·1·1,0	1·0·1,0	1·0·1,0	0·0·1,2	0·0·1,2
3	0·0·1,3	1·1·1,3	0·0·1,3	1·1·1,3	1·0·1,3
4	1·1·1,6	1·0·1,6	1·0,5·1,6	0·0·1,6	0·0,5·1,6
5	1·1·1,6	1·1·1,6	1·0·1,6	1·1·1,6	1·0·1,6
6	1·1·1,8	1·1·1,8	1·(-1,0) ·1,8	1·1·1,8	1·(-1,0) ·1,8
Суммы	6,0	4,7	-1,0	4,7	-1,8

Таким образом, в случае неравноточных измерений систему нормальных уравнений получаются в виде:

$$[aap]\,x + [abp]y + [acp]z + [adp] = 0$$
$$[abp]\,x + [bbp]y + [bcp]z + [adp] = 0 \qquad (5.13)$$
$$[acp]\,x + [bcp]y + [ccp]z + [cdp] = 0$$

Способ 2. Условные уравнения поправок приводятся к равноточным сразу при их составлении и в нормальной системе уравнений веса уже не учитываются. Система условных уравнений вида (5.5) представляет собой функцию вида:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n$$

Вес этой функции определяется по формуле (4.1) и будет равен:

$$1/P = k_1^{\,2}m_1^{\,2} + k_2^{2}m_2^{2} + \ldots + k_n^{2}m_n^{\,2}$$

Для равноточных измерений вес равен единицы. Поэтому для каждого слагаемого будем иметь

$$k_1^{\,2}m_1^{\,2} = 1, \quad k_2^{2}m_2^{2} = 1, \quad \ldots\ k_n^{2}m_n^{\,2} = 1$$

Следовательно, получаем

$$k_1 = \sqrt{1/m_1^{\,2}} = \sqrt{p_1}, \quad k_2 = \sqrt{1/m_2^{\,2}} = \sqrt{p_2}, \ \ldots, \quad k_n = \sqrt{1/m_n^{\,2}} = \sqrt{p_n},$$

Таким образом, необходимо умножить каждый коэффициент и свободный член условных уравнений на $\sqrt{p}$, чтобы привести систему неравноточных условных уравнений к равноточным. Далее переход к системе нормальных уравнений проводят как показано в примере 1, то есть уже без учета весов.

Пример 3. Пусть задана система условных уравнений с весами p:

	вес, p
$x = V_1$	1,2
$y = V_2$	1
$z = V_3$	1,3
$x + y + 0,5 = V_4$	1,6
$y + z = V_5$	1,6
$x + y + z - 1,0 = V_6$	1,8

1. Приводим систему неравноточных условных уравнений к равноточным путем умножения на $\sqrt{p}$:

$$x\sqrt{1,2} = V_1$$
$$y\sqrt{1} = V_2$$
$$z\sqrt{1,3} = V_3$$
$$x\sqrt{1,6} + y\sqrt{1,6} + 0,5\sqrt{1,6} = V_4$$
$$y\sqrt{1,6} + z\sqrt{1,6} = V_5$$
$$x\sqrt{1,8} + y\sqrt{1,8} + z\sqrt{1,8} - 1,0\sqrt{1,8} = V_6$$

Имеем следующую систему равноточных условных уравнений поправок

$$1{,}10x = V_1$$

$$y = V_2$$

$$1{,}14z = V_3$$

$$1{,}26x+1{,}26y + 0{,}63 = V_4$$

$$1{,}26y+1{,}26z = V_5$$

$$1{,}34x+1{,}34y+1{,}34 -1{,}34 = V_6$$

Задача 1. Приведите систему условных уравнений поправок к системе нормальных уравнений

$$0{,}5x + 0{,}75y +1.125z = 0{,}025$$

$$x + 1{,}1y + 1{,}21z = -0{,}03$$

$$x + 0{,}7y + 0{,}49z = -0{,}02$$

$$0{,}5x +0{,}205y + 0{,}045z = 0{,}01$$

$$x + 0{,}1y + 0{,}01z = -0{,}36$$

Задача 2. Найдите уравненные значения искомых величин, если они связаны с измеренными параметрами уравнениями (измерения равноточные).

$$x + y = 3{,}01$$

$$2{,}19x + 1{,}1y = 0{,}03$$

$$0{,}84x + 2{,}52y = 5{,}9$$

$$2{,}1x + 0{,}7y = 3{,}5$$

Задача 3. Приведите систему условных неравноточных уравнений к нормальной системе уравнений

$x + y = 3{,}01$	веса 1,0
$2x + y = 0{,}03$	1,2
$x + 3y = 7{,}02$	0,7
$3x + y = 4{,}97$	0,5

ТЕМА 6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД УРАВНИВАНИЯ. СОСТАВЛЕНИЕ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Существует два основных способа составления условных уравнений в задачи уравнивания: параметрический способ (способ непосредственных измерений) и коррелатный способ (способ условий). Оба способа уравнивания приводят к одним и тем же результатам, но они обладают различной трудоемкостью при решении одной и той же задачи. Кроме указанных способов существуют комбинированные способы уравнивания, которые сочетают приемы того и другого способов.

Рассмотрим принципы составления условных уравнения поправок параметрическим способом. Пусть имеем n измеренных величин $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Требуется найти m неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, связанных с измеренными величинами функциональной зависимостью при условии $n>m$. Неизвестные x_1, x_2, x_m выражаются через измеренные $L_1, L_2, \ldots, L_n$ в виде математических соотношений по правилу «уравненное минус измеренное равно поправка»:

$$f_i\ (x_1, x_2, x_m) - L_i = v_i \qquad (6.1)$$

Уравнение поправок (6.1) сразу стараются записать в линейном виде. Если это не удается сделать, то применяют методы линеаризации, например, разложение функции (6.1) в ряд Тейлора.

Для упрощения вычислительных действий (в случае разложения в ряд Тейлора это необходимое условие) значения неизвестных выражают через приближенные значения и поправки к ним:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{01} + \delta x_1, \\ x_2 &= x_{02} + \delta x_2 \\ x_m &= x_{0m} + \delta x_m \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Приближенные значения вычисляют по результатам измерений. Тогда уравнения поправок (6.1) получим в общем виде:

$$f_i\ (x_{01} + \delta x_1, x_{01} + \delta x_2, x_{0m} + \delta x_m) - L_i = v_i \qquad (6.3)$$

и в линейном виде:

$$a_1\,\delta x_1 + b_1\delta x_2\ + \dots + g_1\delta x_m + l_1 = v_1$$
$$a_2\,\delta x_1 + b_2\delta x_2\ + \dots + g_2\delta x_m + l_2 = v_2 \qquad (6.4)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n\delta x_1 + b_n\delta x_2\ + \dots + g_n\delta x_m + l_n = v_n$$

Число уравнений поправок должно быть равно числу n измеренных величин. Так как число уравнений больше числа неизвестных m, то для определения неизвестных величин $\delta x_1,\ \delta x_2,\ \dots,\ \delta x_m$ система условных уравнений должна быть приведена к системе нормальных уравнений, как это было рассмотрено выше (см. Тема 5.). Решение системы нормальных уравнений относительно неизвестных позволит найти значения $\delta x_1,\ \delta x_2,\dots,\ \delta x_m$, а затем по формулам (6.2) найти уравненные значения искомых величин $x_1,\ x_2,\dots,\ x_m$.

Пример. Уравновесить параметрическим способом результаты нивелирования по неравноточным измерениям (см. табл.), если известны высоты твердых марок А 247,069 м и марки В 248,613 м. На схеме нивелирной сети направления ходов, показанные стрелками, соответствуют знакам измеренных превышений.

Таблица.

№ хода	превышения, м	число станций, N	вес, 25/N
1	+2,987	45	0,56
2	- 0,865	39	0,64
3	+2,116	35	0,71
4	- 1,220	37	0,68
5	+0,893	42	0,60
6	- 0,642	63	0,40
7	- 1,451	52	0,48
8	- 0,583	57	0,44

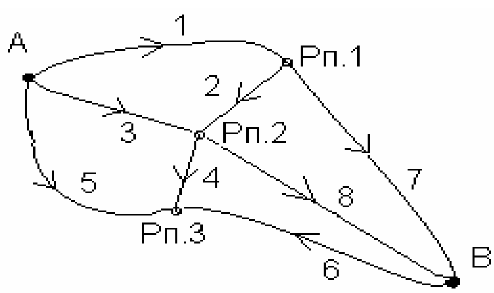

Схема нивелирных ходов

1. Выберем в качестве неизвестных высоты реперов Рп. 1, Рп. 2, Рп. 3 и обозначим их соответственно x, y, z.

2. Для удобства вычислений введем приближенные значения неизвестных, выразив их через наиболее надежные высоты твердых марок.

$$x = x_0 + \delta x = H_A + h_1 + \delta x = 247{,}069 + 2{,}987 + \delta x = 250{,}056 + \delta x \text{ (м)}$$

$$y = y_0 + \delta y = H_A + h_3 + \delta y = 247{,}069 + 2{,}116 + \delta y = 249{,}185 + \delta y \text{ (м)}$$

$$z = z_0 + \delta z = H_A + h_5 + \delta z = 247{,}069 + 0{,}893 + \delta z = 247{,}962 + \delta z \text{ (м)}$$

3. По числу измеренных превышений составим восемь уравнений поправок по правилу «уравненное превышение минус измеренное равно поправка».

1. $(x - H_A) – h_1 = v_1$
2. $(y - x) – h_2 = v_2$
3. $(y - H_A) – h_3 = v_3$
4. $(z – y) – h_4 = v_4$
5. $(z - H_A) – h_5 = v_5$
6. $(z – H_B) – h_6 = v_6$
7. $(H_B - x) – h_7 = v_7$
8. $(H_B - y) – h_8 = v_8$

4. Подставим в уравнения поправок значения x, y, z, выраженные через приближенные значения.

1. $(H_A + h_1 + \delta x) - H_A – h_1 = v_1$
2. $(H_A + h_3 + \delta y) – (H_A + h_1 + \delta x) – h_2 = v_2$
3. $(H_A + h_3 + \delta y - H_A) – h_3 = v_3$
4. $(H_A + h_5 + \delta z) – (H_A + h_3 + \delta y) – h_4 = v_4$
5. $(H_A + h_5 + \delta z - H_A) – h_5 = v_5$
6. $(H_A + h_5 + \delta z – H_B) – h_6 = v_6$
7. $H_B – (H_A + h_1 + \delta x) – h_7 = v_7$
8. $H_B – (H_A + h_3 + \delta y) – h_8 = v_8$

5. Подставим значения высот марок и измеренных превышений и получим систему условных уравнений поправок (свободные члены выразим в сантиметрах).

			вес
1.	$+\delta x$	$= v_1$	0,56
2.	$-\delta x + \delta y \quad - 0{,}6$	$= v_2$	0,64
3.	$+\delta y$	$= v_3$	0,71
4.	$-\delta y + \delta z - 0{,}3$	$= v_4$	0,68
5.	$+\delta z$	$= v_5$	0,60
6.	$+\delta z - 0{,}9$	$= v_6$	0,40
7.	$-\delta x \quad + 0{,}8$	$= v_7$	0,48
8.	$-\delta y \quad + 1{,}1$	$= v_8$	0,44

6. Для дальнейших вычислений найдем веса измеренных превышений как 25/N, где N - число станций в нивелирном ходе. Запишем значения весов в таблицу исходных данных и для каждого условного уравнения.

7. Составим таблицу коэффициентов условных линейных уравнений, выполним их перемножение и суммирование с учетом весов измерений (см. Тема 5).

	paa	*pab*	*pac*	*pal*	*pbb*	*pbc*	*pbl*	*pcc*	*pcl*
1	+0,56	0	0	0	0	0	0	0	0
2	+0,64	-0,64	0	+0,384	+0,64	0	-0,384	0	0
3	0	0	0	0	+0,71	0	0	0	0
4	0	0	0	0	+0,68	-0,68	+0,204	+0,68	-0,204
5	0	0	0	0	0	0	0	+0,6	0
6	0	0	0	0	0	0	0	+0,4	-0,36
7	+0,48	0	0	-0,384	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	+0,44	0	-0,484	0	0
Суммы	+1,68	-0,64	0	0	+2,47	-0,68	-0,664	+1,68	-0,564

8. Получаем систему нормальных уравнений

$$1{,}680\delta x - 0{,}640\delta y + 0\delta z \quad + 0 \quad = 0$$

$$-0{,}640\delta x + 2{,}470\delta y - 0{,}680\delta z - 0{,}664 = 0$$

$$0 \qquad - 0{,}680\delta y + 1{,}680\delta z - 0{,}564 = 0$$

9. Решаем систему нормальных уравнений относительно δx, δy, δz методом исключений

$$\delta x = +\,0{,}174 \text{ см}, \quad \delta y = +\,0{,}457 \text{ см}, \quad \delta z = +\,0{,}521 \text{ см}$$

10. Выполним контроль вычислений. Просуммируем по столбцам коэффициенты и свободные члены системы нормальных уравнений. Запишем суммарное уравнение

$$1{,}040\delta x + 1{,}150\delta y + 1{,}000\delta z - 1{,}228 = 0$$

Подставим значения δx, δy, δz в это уравнение и проверим выполнение равенства нулю

$$0{,}181 + 0{,}526 + 0{,}521 - 1{,}228 = 0{,}000 \text{ (см)}$$

11. Вычислим уравненные значения высот реперов

Рп.1: $x = x_0 + \delta x = 250{,}056 + 0{,}00174 = 250{,}0577 = 250{,}058$ (м)

Рп.2: $y = y_0 + \delta y = 249{,}185 + 0{,}00457 = 249{,}1896 = 249{,}190$ (м)

Рп.3: $z = z_0 + \delta z = 247{,}962 + 0{,}00521 = 247{,}9672 = 247{,}967$ (м)

12. Вычислим значения поправок по условным уравнениям и запишем их в сантиметрах с точностью до двух знаков после запятой

1. $v_1 = +\,\delta x = +\,0{,}17$ см
2. $v_2 = -\,\delta x + \delta y - 0{,}6 = -\,0{,}174 + 0{,}457 - 0{,}6 = -\,0{,}32$ см
3. $v_3 = +\,\delta y = +\,0{,}46$ см
4. $v_4 = -\,\delta y + \delta z - 0{,}3 = -0{,}457 + 0{,}521 - 0{,}3 = -\,0{,}24$ см
5. $v_5 = +\,\delta z = +\,0{,}52$ см
6. $v_6 = +\,\delta z - 0{,}9 = 0{,}521 - 0{,}9 = -\,0{,}38$ см
7. $v_7 = -\,\delta x + 0{,}8 = -\,0{,}174 + 0{,}8 = +\,0{,}63$ см
8. $v_8 = -\,\delta y + 1{,}1 = -\,0{,}457 + 1{,}1 = +\,0{,}64$ см

13. Вычислим уравненные значения превышений

$$h_1 + v_1 = +2{,}987 + 0{,}0017 = +2{,}989 \text{ м}$$

$$h_2 + v_2 = -\,0{,}865 - 0{,}0032 = -\,0{,}868 \text{ м}$$

$$h_3 + v_3 = +\,2{,}116 + 0{,}0046 = +\,2{,}121 \text{ м}$$

$$h_4 + v_4 = -\,1{,}220 - 0{,}0024 = -\,1{,}222 \text{ м}$$

$$h_5 + v_5 = +\,0{,}893 + 0{,}0052 = +\,0{,}898 \text{ м}$$

$$h_6 + v_6 = -\,0{,}642 - 0{,}0038 = -\,0{,}646 \text{ м}$$

$$h_7 + v_7 = -\,1{,}451 + 0{,}0063 = -\,1{,}445 \text{ м}$$

$$h_8 + v_8 = -0{,}583 + 0{,}0064 = -0{,}577 \text{ м}$$

14. Произведем окончательный контроль вычислений

1. $(x - H_A) = h_1 + v_1 = 250{,}0577 – 247{,}0690 = + 2{,}9887$ м
2. $(y - x) = h_2 + v_2 = 249{,}1896 – 250{,}0577 = - 0{,}8681$ м
3. $(y - H_A) = h_3 + v_3 = 249{,}1896 – 247{,}0690 = + 2{,}1206$ м
4. $(z – y) = h_4 + v_4 = 247{,}9672 – 249{,}1896 = - 1{,}2224$ м
5. $(z - H_A) = h_5 + v_5 = 247{,}9672 – 247{,}0690 = + 0{,}8982$ м
6. $(z – H_B) = h_6 + v_6 = 247{,}9672 – 248{,}6130 = - 0{,}6458$ м
7. $(H_B - x) = h_7 + v_7 = 248{,}6130 – 250{,}0577 = - 1{,}4447$ м
8. $(H_B - y) = h_8 + v_8 = 248{,}6130 – 249{,}1896 = - 0{,}5766$ м

Задача 1. В плоском треугольнике равноточно измерены все три угла с результатами α, β и γ, найти поправки к значениям углов параметрическим способом.

ТЕМА 7. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД УРАВНИВАНИЯ. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ УРАВНЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Для оценки точности уравненных величин в параметрическом методе неизвестные выражают в виде линейной функции свободных членов d_i и неопределенных множителей Q_{ik}, называемых весовыми коэффициентов. Первый индекс i при весовом коэффициенте указывает номер неизвестного, второй k – номер нормального уравнения, которое умножается на Q_{ik}.

$$\begin{array}{lccc} & \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \\ [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad] = 0 & Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + [ad] = 0 & Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + [cd] = 0 & Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{array}$$

Весовые множители Q_{11}, Q_{21}, Q_{31} относятся к неизвестному x и определяются из следующих условий:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{11} + [ab]Q_{21} + [ac]Q_{31} &= 1 \\ [ab]Q_{11} + [bb]Q_{21} + [bc]Q_{31} &= 0 \\ [ac]Q_{11} + [bc]Q_{21} + [cc]Q_{31} &= 0 \end{aligned} \qquad (7.1)$$

тогда неизвестная величина x выражается в виде линейной функции свободных членов d_i и неопределенных множителей Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} в виде

$$- x = [ad]Q_{11} + [bd]Q_{21} + [cd]Q_{31} \qquad (7.2)$$

Весовые множители Q_{21}, Q_{22}, Q_{23} относятся к неизвестному y и определяются из следующих условий:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{21} + [ab]Q_{22} + [ac]Q_{23} &= 0 \\ [ab]Q_{21} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{23} &= 1 \\ [ac]Q_{21} + [bc]Q_{22} + [cc]Q_{23} &= 0 \end{aligned} \qquad (7.3)$$

тогда неизвестная величина y выражается в виде линейной функции свободных членов d_i и неопределенных множителей Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} в виде

$$- y = [ad]Q_{21} + [bd]Q_{22} + [cd]Q_{23} \qquad (7.4)$$

Весовые множители Q_{31}, Q_{32}, Q_{33} относятся к неизвестному y и определяются из следующих условий:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{31} + [ab]Q_{32} + [ac]Q_{33} &= 0 \\ [ab]Q_{31} + [bb]Q_{32} + [bc]Q_{33} &= 0 \end{aligned} \qquad (7.5)$$

$$[ac]Q_{31} + [bc]Q_{32} + [cc]Q_{33} = 1$$

тогда неизвестная величина z выражается в виде линейной функции свободных членов d_i и неопределенных множителей Q_{31}, Q_{32}, Q_{33} в виде

$$- z = [ad]Q_{31} + [bd]Q_{23} + [cd]Q_{33} \qquad (7.6)$$

Обозначим в (7.2), (7.4) и (7.6)

$$a_iQ_{11} + b_iQ_{12} + c_iQ_{13} = \alpha_i$$

$$a_iQ_{12} + b_iQ_{22} + c_iQ_{23} = \beta_i$$

$$a_iQ_{31} + b_iQ_{32} + c_iQ_{33} = \gamma_i$$

Тогда равенства (7.2), (7.4) и (7.6) запишутся в виде:

$$- x = \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \ldots + \alpha_n d_n$$

$$- y = \beta_1 d_1 + \beta_2 d_2 + \ldots + \beta_n d_n \qquad (7.7)$$

$$- z = \gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \ldots + \gamma_n d_n$$

В полученных выражениях (7.7) коэффициенты α_i , β_i γ_i - постоянные коэффициенты, которые не содержат ошибок, а свободные члены d_i характеризуются той же средней квадратической ошибкой , что результаты прямых измерений. Поэтому можно применить формулу (4.1) оценки точности линейной функции к формулам (7.7):

$$m^2_x = \alpha_1{}^2 m + \alpha_2{}^2 m + \ldots + \alpha_n{}^2 m$$

$$m^2_y = \beta_1{}^2 m + \beta_2{}^2 m + \ldots + \beta_2{}^2 m \qquad (7.8)$$

$$m^2_z = \gamma_1{}^2 m + \gamma_2{}^2 m + \ldots + \gamma_n{}^2 m$$

Путем математических преобразований можно доказать следующие равенства:

$$[\alpha\alpha] = Q_{11} \qquad [\beta\beta] = Q_{22} \qquad [\gamma\gamma] = Q_{33}$$

Тогда из соотношений (7.8) находим средние квадратические ошибки уравненных величин x, y, z и их веса:

$$m_x = m\sqrt{Q_{11}} \qquad p_x = 1/Q_{11}$$

$$m_y = m\sqrt{Q_{22}} \qquad p_y = 1/Q_{22} \qquad (7.9)$$

$$m_z = m\sqrt{Q_{33}} \qquad p_y = 1/Q_{33}$$

Неквадратические весовые коэффициенты , различающиеся лишь порядков индексов, равны между собой $Q_{ik} = Q_{ki}$

Из сравнения системы нормальных уравнений (5.12) и системы весовых уравнений (7.1), (7.3), (7.5) видно, что эти системы имеют одинаковые коэффициенты и различаются лишь неизвестными и свободными членами. Поэтому весовые коэффициенты так же можно найти с помощью матриц или способом исключения. В случае применения матричного метода определитель будет одинаковым и для системы нормальных уравнений, и для весовых уравнений, но дополнительно необходимо вычислить миноры D_{Q11} D_{Q22} D_{Q33} для нахождения коэффициентов Q_{ik} .

$$D_{Q11} = \begin{vmatrix} 1 & [ab] & [ac] \\ 0 & [bb] & [bc] \\ 0 & [bc] & [cc] \end{vmatrix}$$

$$D_{Q22} = \begin{vmatrix} [aa] & 0 & [ac] \\ [ab] & 1 & [bc] \\ [ab] & 0 & [cc] \end{vmatrix}$$

$$D_{Q33} = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & 0 \\ [ab] & [bb] & 0 \\ [ac] & [bc] & 1 \end{vmatrix}$$

Для вычисления весовых коэффициентов можно также воспользоваться алгоритмом Гаусса, разработанным на основе способа исключения. Весовые коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$Q_{33} = 1/[cc\cdot 2]$$

$$Q_{23} = Q_{32} = - Q_{32}\,[bc\cdot 1]/[bb\cdot 1]$$

$$Q_{13} = Q_{31} = - Q_{32}\,[ab]/[aa] - Q_{33}\,[ac]/[aa] \qquad (7.10)$$

$$Q_{22} = - Q_{23}\,[bc\cdot 1]/[bb\cdot 1] + 1/[bb\cdot 1]$$

$$Q_{12} = Q_{21} = - Q_{22}\,[ab]/[aa] – Q_{23}\,[ac]/[aa]$$

$$Q_{11} = - Q_{12}\,[ab]/[aa] – Q_{13}\,[ac]/[aa] + 1/[aa]$$

Формулы записаны через символы Гаусса $[cc\cdot 2]$, $[bc\cdot 1]$, $[bb\cdot 1]$, каждый из которых можно расписать в общем виде:

$$A = B - M\cdot N/C ,$$

B – уменьшаемое – символ с теми же символами, что и A, но на порядок меньше;

C – знаменатель дроби – состоит из одноименных букв, порядковый номер которых соответствует цифре раскрываемого символа;

M·N – числитель дроби – это произведение двух символов, каждый из которых получается заменой одной буквой в уменьшаемом символе B одной буквой, стоящей в знаменателе. Раскроем для примера символы Гаусса в (7.10).

$$[cc\cdot 2] = [cc\cdot 1] - [cb\cdot 1]\cdot[cb\cdot 1]/[bb\cdot 1]$$

$$[bc\cdot 1] = [bc] - [ab]\cdot[ac]/[aa]$$

$$[bb\cdot 1] = [bb] - [ab]\cdot[ac]/[aa]$$

Вычисления по алгоритму Гаусса выполняются быстро, так как суммы *[ab], [ac], [aa], [bb]* и другие уже вычислены при составлении нормальных уравнений (5.12).

В заключение необходимо выполнить контроль вычислений весовых коэффициентов по формуле:

$$(Q_{11} + Q_{12} + Q_{13})S_1 + (Q_{21} + Q_{22} + Q_{23})S_2 + (Q_{31} + Q_{32} + Q_{33})S_3 = 3 \qquad (7.11)$$

где $S_1 = ([aa] + [ab] + [ac])$, $S_2 = ([ab] + [bb] + [bc])$, $S_3 = ([ac] + [bc] + [cc])$

Пример. Выполним оценку точности уравненных параметрическим методом высот реперов нивелирного хода для примера, рассмотренного в Теме 6.

1. Вычислим среднюю квадратическую ошибку единицы веса

$$\mu = \pm\sqrt{[pv^2]/(n-t)} = \pm\sqrt{0{,}861/(8-3)} = 0{,}41 \text{ см},$$

где v_i – вычисленные поправки к измеренным превышениям, n – число измерений, t – число неизвестных величин.

2. Вычислим ошибку самой ошибки единицы веса

$$m_\mu = \pm\sqrt{\mu/2(n-t)} = \pm\sqrt{0{,}41/2(8-3)} = 0{,}13 \text{ см}$$

3. Найдем средние квадратические ошибки (7.9) уравненных значений δx, δy, δz (высот определяемых реперов)

$$m_x = m\sqrt{Q_{11}} = 0{,}41\sqrt{Q_{11}} = 0{,}41\sqrt{0{,}699} = 0{,}34 \text{ см}$$

$$m_y = m\sqrt{Q_{22}} = 0{,}41\sqrt{Q_{22}} = 0{,}41\sqrt{0{,}512} = 0{,}29 \text{ см}$$

$$m_z = m\sqrt{Q_{33}} = 0{,}41\sqrt{Q_{33}} = 0{,}41\sqrt{0{,}679} = 0{,}34 \text{ см}$$

Значения весовых коэффициентов найдем по формулам (7.10)

[cc·2] = 0,679, [cc·1] = 1,680, [bb·1] = 2,226, [bc·1] = -0,680

$Q_{33} = 0{,}679$ $\quad Q_{32} = Q_{23} = 0{,}207$ $\quad Q_{31} = Q_{13} = 0{,}079$

$Q_{22} = 0{,}512$ $\quad Q_{21} = Q_{12} = 0{,}195$

$Q_{11} = 0{,}669$

4. Выполним контроль вычислений весовых коэффициентов (7.11)

$$(Q_{11} + Q_{12} + Q_{13})S_1 + (Q_{21} + Q_{22} + Q_{23})S_2 + (Q_{31} + Q_{32} + Q_{33})S_3 =$$

$$= 0{,}981 + 1{,}053 + 0{,}965 = 2{,}999 \cong 3$$

ТЕМА 8. КОРРЕЛАТНЫЙ МЕТОД УРАВНИВАНИЯ. СОСТАВЛЕНИЕ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим принципы составления условных уравнения поправок коррелатным методом (методом условий). Пусть имеем n неизвестных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, связанных r математическими соотношениями (условиями), причем $n > r$. Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выражаются через измеренные $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Вследствие ошибок результаты измерений не будут удовлетворять условным уравнениям. Поэтому из уравнивания должны быть найдены такие поправки v_i, чтобы с исправленными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равными

$$\begin{aligned} l_1 + v_1 &= x_1, \\ l_2 + v_2 &= x_2, \\ l_n + v_n &= x_n \end{aligned} \tag{8.1}$$

выполнялись все r независимых условий и одновременно сумма квадратов поправок v_i была бы минимальной.

Рассмотрим случай, когда зависимость между величинами выражается r независимыми условными уравнениями линейного вида:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n &= 0 \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_2 x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_n x_n &= 0 \end{aligned} \tag{8.2}$$

где r – число условий, n - число неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем $n > r$, а $a_i, b_i, \ldots, r_i$ – это известные постоянные коэффициенты. Если подставить в (8.2) выражения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из (8.1), то получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + \ldots + a_n l_n) + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n &= 0 \\ (b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + \ldots + b_n l_n) + b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (r_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + \ldots + r_n l_n) + r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n &= 0 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Выражения в скобках представляют собой невязки результатов измерений, обозначим их соответственно $w_a, w_b, \ldots, w_r$.

Тогда уравнения (8.3) примут вид:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + w_a = 0$$
$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + w_b = 0 \qquad (8.4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n + w_r = 0$$

где r – число условий, n - число измеренных величие и число неизвестных поправок $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $t = n\text{-}r$ есть число необходимых измерений.

Система условных уравнений поправок (8.4) является неопределенной, так как число поправок v_i больше числа условных уравнений $n > r$ и решается методом наименьших квадратов $[vv] = min$. В условные уравнения вводят неопределенные множители – коррелаты вида $-2k_a$, $-2k_b, \ldots$, $-2k_r$. Умножим уравнения (8.4) соответственно на $-2k_a$, $-2k_b, \ldots$, $-2k_r$ и сложим их с величиной $[vv]$. Получим функцию вида:

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_n) = [vv] - 2k_a([av]+w_a) - 2k_b([bv]+w_b) - \ldots - 2k_r([rv]+w_r) \qquad (8.5)$$

Значения поправок $v_1, v_2, \ldots, v_n$, при которых функция F достигает минимума найдем, взяв частные производные функции F по аргументам $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и приравняв их к нулю:

$$\partial F/\partial v_1 = 2v_1 - 2(k_a a_1 + k_b b_1 + \ldots + kr_1) = 0$$
$$\partial F/\partial v_2 = 2v_2 - 2(k_a a_2 + k_b b_2 + \ldots + kr_2) = 0 \qquad (8.6)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\partial F/\partial v_n = 2v_n - 2(k_a a_n + k_b b_n + \ldots + kr_n) = 0$$

Откуда находим коррелатные уравнения поправок:

$$v_1 = k_a a_1 + k_b b_1 + \ldots + kr_1$$
$$v_2 = k_a a_2 + k_b b_2 + \ldots + kr_2 \qquad (8.7)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_n = k_a a_n + k_b b_n + \ldots + kr_n$$

Чтобы найти коррелаты, подставим выражения поправок (8.7) в условные уравнения (8.4) и в результате математических преобразований получим определенную систему r уравнений вида:

$$[aa]k_a + [ab]k_b + \ldots + [ar]k_r + w_a = 0$$
$$[ba]k_a + [bb]k_b + \ldots + [br]k_r + w_b = 0 \qquad (8.8)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[ar]k_a + [ar]k_b + \ldots + [rr]k_r + w_r = 0$$

Эти уравнения обладают всеми свойствами нормальных уравнений и называются нормальными уравнениями коррелат, число их равно числу коррелат.

Решив нормальные уравнения коррелат (8.8) любым известным способом (способом исключений, с помощью матриц) относительно неизвестных коррелат, вычисляем значения поправок $v_1, v_2, \ldots, v_n$ по формулам (8.7). Остается получить наиболее надежные значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (8.1) и произвести контроль вычислений.

В случае неравноточных измерений принцип наименьших квадратов записывается как $[pvv] = min$. Следовательно веса измерений p_i войдут в функцию F, а уравнения (8.7) примут вид:

$$\begin{aligned} v_1 &= k_a a_1/p_1 + k_b b_1/p_1 + \ldots + kr_1/p_1 \\ v_2 &= k_a a_2/p_2 + k_b b_2/p_2 + \ldots + kr_2/p_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= k_a a_n/p_n + k_b b_n/p_n + \ldots + kr_n/p_n \end{aligned} \qquad (8.9)$$

Если обозначить $1/p=q$, то соответственно нормальные уравнения (8.8) коррелат для неравноточных измерений имеют вид:

$$\begin{aligned} [aaq]k_a + [abq]k_b + \ldots + [arq]k_r + w_a &= 0 \\ [baq]k_a + [bbq]k_b + \ldots + [brq]k_r + w_b &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [arq]k_a + [arq]k_b + \ldots + [rrq]k_r + w_r &= 0 \end{aligned} \qquad (8.10)$$

Пример. Уравновесить измеренные превышения нивелирных ходов с одной твердой маркой А (см. табл.).

Таблица.

№ хода	превышения, м	длина ходов, L (км)	вес, p=1/L	q=1/p
1	+10,884	11,67	0,086	11,6
2	+4,678	9,24	0,108	9,3
3	+18,559	20,42	0,049	20,4
4	+6,196	6,05	0,165	6,1
5	+13,196	12,86	0,078	12,8
6	+7,666	16,58	0,060	16,7

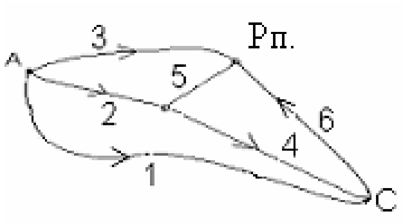

Схема нивелирного хода

1. Определим количество условий r в нивелирной сети по формуле r = P+M-1, где P – замкнутых полигонов в сети, M – число твердых марок. В примере P=3, M=1, следовательно, число условий равно r = 3+1-1=3.
2. Составим уравнения независимых условий исходя из равенства нулю суммы превышений в замкнутом нивелирном ходе:

$$h_1 - h_2 - h_4 = 0$$

$$h_2 - h_3 + h_5 = 0$$

$$h_4 - h_5 + h_6 = 0$$

3. Подставим в уравнения условий измеренные значения превышений

$$h_1 = 10{,}884 + v_1 \qquad h_2 = 4{,}678 + v_2 \qquad h_3 = 18{,}559 + v_3$$

$$h_4 = 6{,}196 + v_4 \qquad h_5 = 13{,}868 + v_5 \qquad h_6 = 7{,}666 + v_6$$

выполним вычисления и получим уравнения условий в виде:

$$v_1 - v_2 - v_4 + 9{,}2 = 0$$

$$v_2 - v_3 + v_5 – 13{,}5 = 0$$

$$v_4 - v_5 + v_6 – 5{,}7 = 0$$

(свободные члены уравнений записаны в миллиметрах).

4. Составим коррелатные уравнения поправок (8.9)

$$v_1 = k_a a_1 q_1 + k_b b_1 q_1 + k_c c_1 q_1$$

$$v_2 = k_a a_2 q_2 + k_b b_2 q_2 + k_c c_2 q_2$$

$$v_3 = k_a a_3 q_3 + k_b b_3 q_3 + k_c c_3 q_3$$

$$v_4 = k_a a_4 q_4 + k_b b_4 q_4 + k_c c_4 q_4$$

$$v_5 = k_a a_5 q_5 + k_b b_5 q_5 + k_c c_5 q_5$$

$$v_6 = k_a a_6 q_6 + k_b b_6 q_6 + k_c c_6 q_6$$

5. Получим нормальные уравнения коррелат по алгоритму

	q	a	b	c	aaq	abq	acq	bbq	bcq	ccq
1	11,6	+1	0	0	11,6	0	0	0	0	0
2	9,3	-1	+1	0	9,3	-9,3	0	9,3	0	0
3	20,4	0	-1	0	0	0	0	20,4	0	0
4	6,1	-1	0	+1	6,1	0	-6,1	0	0	6,1
5	12,8	0	+1	-1	0	0	0	12,8	-12,8	12,8
6	16,7	0	0	+1	0	0	0	0	0	16,7
Суммы					27,0	-9,3	-6,1	42,5	-12,8	35,6

Запишем нормальные уравнения коррелат в виде (8.10)

$$27{,}0\ k_a - 9{,}3\ k_b - 6{,}1\ k_r + 9{,}2 = 0$$

$$-9{,}3\ k_a + 42{,}5\ k_b - 12{,}8\ k_r - 13{,}2 = 0$$

$$\underline{-6{,}1\ k_a - 12{,}8\ k_b + 35{,}6\ k_r - 5{,}7 = 0}$$

Сумма $$11{,}6k_a + 20{,}4k_b + 16{,}7k_r - 9{,}7 = 0$$

6. Решим нормальные уравнения коррелат относительно неизвестных k_a, k_b, k_r

$$k_a = -0{,}157, \quad k_b = +0{,}364, \quad k_r = +0{,}266$$

Проведем контрольные вычисления

$$11{,}6(-0{,}157) + 20{,}4(+0{,}364) + 16{,}7(+0{,}266) - 9{,}7 = 0$$

7. Вычислим значения поправок (8.7)

$$v_1 = 11{,}6\cdot(-0{,}157\cdot 1 + 0{,}364\cdot 0 + 0{,}266\cdot 0) = -1{,}82 \text{ (мм)}$$

$$v_2 = 9{,}3\cdot(-0{,}157\cdot(-1) + 0{,}364\cdot 1 + 0{,}266\cdot 0) = +4{,}84 \text{ (мм)}$$

$$v_3 = 20{,}4\cdot(-0{,}157\cdot 0 + 0{,}364\cdot(-1) + 0{,}266\cdot 0) = -7{,}43 \text{ (мм)}$$

$$v_4 = 6{,}1\cdot(-0{,}157\cdot(-1) + 0{,}364\cdot 0 + 0{,}266\cdot 1) = +2{,}56 \text{ (мм)}$$

$$v_5 = 12{,}8\cdot(-0{,}157\cdot 0 + 0{,}364\cdot 1 + 0{,}266\cdot(-1)) = +1{,}26 \text{ (мм)}$$

$$v_6 = 16{,}7\cdot(-0{,}157\cdot 0 + 0{,}364\cdot 0 + 0{,}266\cdot 1) = +4{,}41 \text{ (мм)}$$

Задача. В плоском треугольнике измерены все три угла с результатами α, β, γ, которые требуется уравновесить коррелатным методом.

ТЕМА 9. КОРРЕЛАТНЫЙ МЕТОД УРАВНИВАНИЯ. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ УРАВНЕННЫХ ФУНКЦИЙ

При коррелатном методе уравнивания выполняют оценку точности для некоторого элемента геодезической сети, величина которого выражается через уравненные значения измеренных величин в виде функции

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (9.1)$$

Вес функции определяется по формуле (4.1)

$$1/P_F = (\partial F/\partial x_1)^2 \cdot 1/p_1 + (\partial F/\partial x_2)^2 \cdot 1/p_2 + \ldots + (\partial F/\partial x_к)^2 \cdot 1/p_n$$

Введем обозначения

$$(\partial F/\partial x_1)^2 = f_1, \quad (\partial F/\partial x_2)^2 = f_2, \; \ldots, \; (\partial F/\partial x_к)^2 = f_n,$$

умножим левые и правые части уравнения поправок (8.7) на соответствующие коэффициенты $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и полученные произведения сложим по столбцам

$$\begin{aligned} v_1 &= k_a a_1 + k_b b_1 + \ldots + kr_1 \qquad f_1 \\ v_2 &= k_a a_2 + k_b b_2 + \ldots + kr_2 \qquad f_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= k_a a_n + k_b b_n + \ldots + kr_n \qquad f_n \end{aligned}$$

сумма $\quad [fv] = [af]k_a + [bf]k_b + \ldots + [rf]k_r$

Перейдем к уравнениям коррелат (8.8), но заменим свободные члены на суммы [*af*], [*bf*], …, [*rf*], значения коррелат - на неопределенные множители Q_i

$$\begin{aligned} [aa]Q_a + [ab]Q_b + \ldots + [ar]Q_r + [af] &= 0 \\ [ba]Q_a + [bb]Q_b + \ldots + [br]Q_r + [bf] &= 0 \qquad (9.2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ar]Q_a + [ar]Q_b + \ldots + [rr]Q_r + [rf] &= 0 \end{aligned}$$

Неопределенные множители Q_i называются переходными множителями, а система нормальных уравнений (9.2) – переходными уравнениями, приравненными к нулю на основе неопределенности множителей. После нахождения неопределенных множителей Q_i из системы уравнений (9.2) вес заданной функции (9.1) вычисляют по формуле:

$$1/P_F = [af]Q_a + [bf]Q_b + \ldots + [rf]Q_r + [ff] \qquad (9.3)$$

Среднюю квадратическую ошибку функции уравновешенных величин находят по формуле:

$$m_F = m\sqrt{1/P_F} \qquad (9.4)$$

где $m = \pm\sqrt{[vv]/r}$ – средняя квадратическая ошибка непосредственного измерения.

В случае неравноточных измерений формулы (9.2), (9.3) и (9.4) запишутся с учетом весов $q = 1/p_i$ в виде

$$\begin{aligned} &[aaq]Q_a + [abq]Q_b + \ldots + [arq]Q_r + [afq] = 0 \\ &[baq]Q_a + [bbq]Q_b + \ldots + [brq]Q_r + [bfq] = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[arq]Q_a + [arq]Q_b + \ldots + [rrq]Q_r + [rfq] = 0 \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$1/P_F = [afq]Q_a + [bfq]Q_b + \ldots + [rfq]Q_r + [ffq] \quad (9.6)$$

$$m_F = \mu\sqrt{1/P_F} \quad (9.7)$$

где $\mu = \sqrt{[pv^2]/(n-r)}$ – ошибка единицы веса. Неопределенные коэффициенты из системы (9.2) находят матричным способом, а затем по формуле (9.6) находят вес функции.

Если воспользоваться алгоритмом Гаусса (см. Тема 7), то можно сразу вычислить вес функции по формуле:

$$1/P_F = [ffq] - [afq]^2/[aaq] - [bfq]^2/[bb\cdot 1] - \ldots - [rfq(r-1)]^2/[rrq(r-1)] \quad (9.8)$$

Аналогично $1/P_F$ по формуле Гаусса вычисляется и для равноточных измерений, но без учета веса измерений.

Пример. Найти среднюю квадратическую ошибку разности высот между марками А и С, если высота марки С определялась по уравненным превышениям, имеющим наибольший вес (см. Тема 8. Пример).

1. Оценим точность измерения с весом, равным единицы,

$$\mu = \sqrt{[pv^2]/(n-r)} = \sqrt{7,864/(6-3)} = \pm 1,62 \text{ (мм)}$$

2. Запишем формулу разности высот между А и С, учитывая, что наибольший вес имеют измеренные превышения h_2 и h_4. Тогда функция, точность которой требуется оценить, будет иметь вид

$$F = H_C - H_A = h_2 + h_4$$

3. Вычислим коэффициенты

$$f_1 = (\partial F/\partial h_2)^2 = +1, \quad f_2 = (\partial F/\partial h_4)^2 = +1,$$

$$f_1 = (\partial F/\partial h_1)^2 = 0, \quad f_3 = (\partial F/\partial h_3)^2 = 0,$$

$$f_5 = (\partial F/\partial h_5)^2 = 0, \quad f_6 = (\partial F/\partial h_6)^2 = 0,$$

4. Вычислим дополнительно переходные коэффициенты с учетом весов

	q	a	b	c	aaq	abq	acq	bbq	bcq	ccq	f	afq	bfq	cfq	ffq
1	11,6	+1	0	0	11,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	9,3	-1	+1	0	9,3	-9,3	0	9,3	0	0	+1	-9,3	9,3	0	9,3
3	20,4	0	-1	0	0	0	0	20,4	0	0	0	0	0	0	0
4	6,1	-1	0	+1	6,1	0	-6,1	0	0	6,1	+1	-6,1	0	6,1	6,1
5	12,8	0	+1	-1	0	0	0	12,8	-12,8	12,8	0	0	0	0	0
6	16,7	0	0	+1	0	0	0	0	0	16,7	0	0	0	0	0
Суммы					27,0	-9,3	-6,1	42,5	-12,8	35,6		-15,4	9,3	6,1	15,4

5. Система переходных уравнений (9.5) имеет вид

$$27Q_a - 9{,}3Q_b - 6{,}1Q_c - 15{,}4 = 0$$

$$-9{,}3Q_a + 42{,}5Q_b - 12{,}8Q_r + 9{,}3 = 0$$

$$-6{,}1Q_a - 12{,}8Q_b + 35{,}6Q_r + 6{,}1 = 0$$

6. Решаем систему переходных уравнений относительно Q_1, Q_2, Q_3 способом матриц. Вычисляем дискриминант системы D и дополнения D_1, D_2, D_3

$$D = \begin{vmatrix} 27 & -9{,}3 & -6{,}1 \\ -9{,}3 & 42{,}5 & -12{,}8 \\ -6{,}1 & -12{,}8 & 35{,}6 \end{vmatrix} = 33477{,}413 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} -15{,}4 & -9{,}3 & -6{,}1 \\ 9{,}3 & 42{,}5 & -12{,}8 \\ 6{,}1 & -12{,}8 & 35{,}6 \end{vmatrix} = -25885{,}051$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 27 & -15{,}4 & -6{,}1 \\ -9{,}3 & 9{,}3 & -12{,}8 \\ -6{,}1 & 6{,}1 & 35{,}6 \end{vmatrix} = 4746{,}256 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 27 & -9{,}3 & -15{,}4 \\ -9{,}3 & 42{,}5 & 9{,}3 \\ -6{,}1 & -12{,}8 & 6{,}1 \end{vmatrix} = 4388{,}164$$

$Q_1 = D_1/D = -\,0{,}773$ $\qquad Q_2 = D_2/D = +0{,}142$ $\qquad Q_3 = D_3/D = +0{,}131$

7. Вычисляем весовую функцию (9.6) и среднюю квадратическую ошибку функции $(H_C - H_A) = h_2 + h_4$

$$1/P_F = -15{,}4(-0{,}773) + 9{,}3\cdot 0{,}142 + 6{,}1\cdot 0{,}131 + 15{,}4 = 29{,}424$$

$$m_F = \mu\sqrt{1/P_F} = 1{,}62\sqrt{29{,}424} = 8{,}79 \text{ (мм)}$$

ТЕМА 10. СОСТАВЛЕНИЕ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ФИГУРАХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

При построении геодезических сетей неизбежно приходится решать задачу уравнивания измеренных и искомых величин. При построении сетей триангуляции часто используют коррелатный метод уравнивания, так как элементы треугольника, основного звена триангуляции, связаны между собой известными математическими соотношениями. Рассмотрим наиболее простые виды условий в геодезических построениях.

Для простоты записи условимся обозначать уравненные значения углов – римскими цифрами, измеренные значения – арабскими цифрами, а поправки к измеренным величинам – арабскими цифрами в скобках. Например, вместо $x= l + v$ запишем I = 1+(1).

<u>Условия фигур.</u> Если измерены все внутренние углы плоского замкнутого многоугольника, то сумма уравненных углов должна равняться $180^0\,(n\text{-}2)$.

Тогда для плоского треугольника условие фигуры имеет вид:

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} -180^0 = 0$$

или для измеренных значений углов:

$$(1) + (2) + (3) + w = 0,$$

где w=1+2+3 -180^0 есть невязка измерений.

В случае плоского четырехугольника условие фигуры имеет вид:

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} - 360^0 = 0$$

или для измеренных значений углов:

$$(1) + (2) + (3) + (4) + w = 0,$$

где невязка w=1+2+3 +4-360^0.

<u>Условие горизонта.</u> Если при полюсе (точка О см. рис. 2) измерены все примыкающие друг к другу углы, то сумма уравненных значений углов на плоскости должна равняться 360^0.

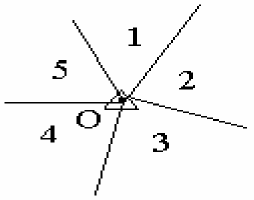

Рис. 2.

Тогда условие горизонта запишется в виде:

$$I + II + III + IV + V - 360^0 = 0$$

или для измеренных значений углов:

$$(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + w = 0,$$

где невязка w=1+2+3 +4+5-360^0.

<u>Условие станции.</u> Уравненные значения независимо измеренных углов на станции О (рис. 3) должны удовлетворять условию:

$$I + II - III = 0$$

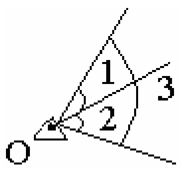

Рис. 3.

или для измеренных значений углов: $(1) + (2) - (3) + w = 0,$

где невязка w=1+2-3.

<u>Условие сумм (условие жесткого угла).</u> Пусть несколько треугольников AOD, DOC, COB вставляются между сторонами AO и OB (рис. 4).

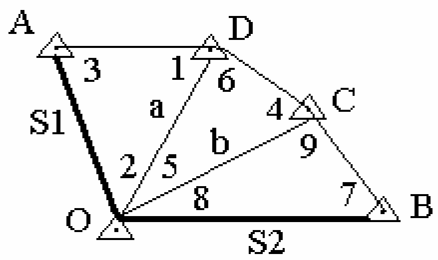

Рис. 4.

Тогда возникает условие фигуры, которая называется «вставкой в угол»:

$$II + V + VIII - \angle AOB = 0$$

или для измеренных значений углов:

$$(1) + (2) - (3) + w = 0$$

где невязка w=2+5+8 -$\angle$AOB. Жесткий угол АОВ вычисляется по твердым координатам пунктов A, O и B. Условие сумм – это частный случай условия дирекционных углов, возникающего при наличии в триангуляции двух или более сторон с твердыми дирекционными углами. Вычисляя по уравненным углам значение дирекционного угла стороны OB от дирекционного угла твердой стороны OA (рис. 4), должны получить значение жесткого угла, данного по условию.

<u>Условие сторон.</u> Условие сторон возникает обычно в тех случаях, когда существует и условие сумм. Рассмотрим условие сторон применительно к фигуре на рис. 4. По теореме синусов из треугольника AOD имеем

$$S1/Sin(I\ ) = a\ /Sin(III)$$

откуда $$S1 = a \cdot Sin(I)\ /Sin(III)$$

Из треугольника COD имеем

$$a = b \cdot Sin(IV)\ /Sin(VI)$$

Тогда для стороны *S1* запишем

$$S1 = b \cdot Sin(IV)\ Sin(I)\ /Sin(VI)\ Sin(III)$$

Кроме того, сторону *b* можно выразить через *S2* как

$$b = S2 \cdot Sin(VII)\ /Sin(IX)$$

$$S1 = S2 \cdot Sin(VII)\ Sin(IV)\ Sin(I)\ /Sin(IX)\ Sin(VI)\ Sin(III)$$

В результате получим условие сторон в виде:

$$S2 \cdot Sin(I)\ Sin(IV)\ Sin(VII)\ /S1 \cdot Sin(III)\ Sin(VI)\ Sin(IX) = 1$$

Подставим измеренные значения углов с их поправками и прологарифмируем

$$lg\ S2 + lg\ Sin[1+(1)] + lg\ Sin[5+(5)] + lg\ Sin[7+(7)] -$$

$$- lg\ S - lg\ Sin[3+(3)] - lg\ Sin[6+(6)] - lg\ Sin[9+(9)] = 0 \qquad (10.1)$$

Чтобы привести условие сторон к линейному виду, разложим каждое слагаемое в ряд Тейлора, ограничиваясь членом с первой степенью малой поправки (i) угла i. В общем виде запишем так

$$lg\ Sin[\mathrm{i}+(\mathrm{i})] = lg\ Sin\ \mathrm{i} + (\mathrm{i}) \cdot M \cdot ctg\ \mathrm{i} \qquad (10.2)$$

где *M* – модуль десятичных логарифмов, равный 0,43429. Если выразить логарифмы синусов и поправочный член в единицах *n*–ого десятичного знака логарифма, а поправку ( ) – в секундах, то выражение (10.2) примет вид

$$lg\ Sin[\mathrm{i}+(\mathrm{i})] = lg\ Sin\ \mathrm{i} + \Delta_{\mathrm{i}} \qquad (10.3)$$

где $$\Delta_{\mathrm{i}} = (\mathrm{i}) \cdot 10^{n}\ M \cdot ctg\ \mathrm{i}\ /\rho''$$

С учетом преобразований (10.2) и (10.3) запишем условие (10.1) в линейном виде:

$$\Delta_1(1) + \Delta_4(4) + \Delta_7(7) - \Delta_3(3) - \Delta_6(6) - \Delta_9(9) +$$
$$lg(S1 \cdot Sin\ 1\ Sin\ 4\ Sin\ 7\ /S2 \cdot Sin\ 3\ Sin\ 6\ Sin\ 9) = 0 \qquad (10.4)$$

Выражение под знаком логарифма в (10.4) вычисляется по измеренным значениям углов и известным значениям S1, S2 твердых сторон и представляет собой невязку w. Тогда условие сторон будет выражено в виде условного уравнения поправок

$$\Delta_1(1) + \Delta_4(4) + \Delta_7(7) - \Delta_3(3) - \Delta_6(6) - \Delta_9(9) + w = 0 \qquad (10.5)$$

При уравнивании углов треугольников, вставляемых между двумя твердыми сторонами (рис. 4) необходимо кроме условий сумм и сторон составит также еще три условия фигур. Таким образом, всего для фигуры на рис. 4 будет пять независимых условий:

условия фигур для треугольников $(1) + (2) + (3) + w_a = 0$

$(4) + (5) + (6) + w_b = 0$

$(7) + (8) + (9) + w_c = 0$

условие сумм $(2) + (5) + (8) + w_d = 0$

условие сторон $\Delta_1(1) + \Delta_4(4) + \Delta_7(7) - \Delta_3(3) - \Delta_6(6) - \Delta_9(9) + w_e = 0$

Помимо рассмотренных условий, возникающих при построении геодезических сетей, существуют и другие условия, например, полюсные условия для цепи треугольников или боковое условие для геодезического четырехугольника. Чтобы не усложнять уравнительные вычисления, необходимо составлять условные уравнения поправок наиболее простого вида, но в любом случае они должны быть независимыми.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

ТЕМА 2.

Задача 1. 2,8 мм.

Задача 2. $\Delta x = 107{,}95$ м $\pm$ 0,11 м, $\Delta y = 94{,}77$ м $\pm$ 0,32 м

Задача 3. 6,27 м $\pm$ 0,05 м

Задача 4. 99,88 м $\pm$ 0,34 м

ТЕМА 3.

Задача. $X = 196{,}5277$ м, $\mu = 2{,}9$ мм, $M_x = 2{,}3$ мм.

ТЕМА 4.

Задача 1. 1.

Задача 2. 2.

ТЕМА 5.

Задача 1.

$$3{,}5x+2{,}378y+2{,}295z+0{,}392=0$$
$$2{,}378x+2{,}314y+2{,}528z+0{,}062=0$$
$$2{,}295x+2{,}528y+2{,}972z+0{,}021=0$$

Задача 2. $x=-0{,}09$ $y=2{,}33$

Задача 3.

$$10{,}91x+7{,}0y+15{,}38=0$$
$$7x+9y+20{,}36=0$$

ТЕМА 6.

Задача 1. $v_1 = v_2 = v_3 = (180^0 - \alpha - \beta - \gamma)/3$

ТЕМА 8.

Задача 1. $v_1 = v_2 = v_3 = (180^0 - \alpha - \beta - \gamma)/3$

ЛИТЕРАТУРА

1. Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. С.-П., Наука, 1997
2. Машимов М.М. Методы математической обработки астрономо-геодезических измерений. М, ВИА, 1990
3. Кондратьева Е. Д. Методы математической обработки наблюдений. Методическое пособие. Казань, КГУ , 2000

СОДЕРЖАНИЕ